DISTRIBUȚII PROBABILISTICE

Teoria matematică a probabilităților a apărut în urma studiului jocurilor și arată care va fi rezultatul, în general, dacă se extrag probe în mod repetat din aceeași populație statistică.

Probabilitatea de apariție a unui anumit eveniment reprezintă șansa ca evenimentul respectiv să se întâmple, exprimată de la 0 la 1 sau de la 0 la 100%. O probabilitate apropiată de 1 înseamnă că evenimentul este unul probabil, iar o probabilitate apropiată de 0 înseamnă că evenimentul respectiv este puțin probabil.

Există mai multe modalități de aflare a probabilității unui eveniment, dintre care două sunt mai des utilizate. Prima modalitate este cea empirică, bazată pe cunoștințe anterioare cu privire la evenimentul respectiv în populație. De exemplu, dacă se știe că într-o populație doi din 5 indivizi aparțin sexului masculin, atunci se poate spune că probabilitatea ca un individ selectat la întâmplare din populație să fie mascul este de 2/5 sau 0,40 (sau 40%). Pentru a afla această probabilitate, sunt necesare cunoștințe asupra raportului dintre sexe în populația studiată. A doua modalitate de aflare a probabilității este cea bazată pe considerații teoretice.

De exemplu, probabilitatea de a obține un anumit număr prin aruncarea unui zar este de 1/6 adică 0,1667. În acest caz, nu este nevoie ca zarul să fie aruncat pentru a ajunge la acest rezultat.

În cele două situații de mai sus, probabilitatea a fost calculată sub forma unui raport. Acest aspect este surprins de **regula împărțirii** conform căreia probabilitatea unui eveniment este dată de numărul de posibilități în care evenimentul respectiv poate să apară împărțit la numărul total de evenimente ce pot să apară.

În primul exemplu de mai sus, erau două posibilități de apariție a unui mascul din trei indivizi pentru care nu se specifică sexul. În al doilea exemplu, era o posibilitate de a obține un anumit număr din șase numere posibile.

În general, se pot face operații cu probabilități, dintre care cele mai frecvent utilizate sunt adunarea sau înmulțirea. Deoarece probabilitățile sunt fracții, adunarea probabilităților duce la o creștere a probabilității compuse, în timp ce înmulțirea, la o scădere a acesteia.

Dacă se cunoaște probabilitatea de apariție a unui rezultat *A* și cea de apariție a unui rezultat *B*, probabilitatea apariției simultane a ambelor rezultate este, conform **regulii înmulțirii**, egală cu produsul probabilităților individuale: *p(A şi B) = p(A) · p(B)*. De exemplu, dacă probabilitatea ca dintr-un ou să iasă o anumită specie este de 0,2 și probabilitatea ca respectivul individ să fie mascul este de 0,5, atunci probabilitatea ca din ou să apară un individ mascul din specia de interes va fi egală cu produsul probabilităților individuale ale celor două rezultate: 0,2 · 0,5 = 0,10.

Dacă se cunoaște probabilitatea de apariție a unui rezultat *A* și cea de apariție a unui rezultat *B*, probabilitatea apariției unuia din cele două rezultate, la un moment dat este egală, conform **regulii adunării,** cu suma probabilităților individuale: *p(A sau B) = p(A) + p(B)*. De exemplu, dacă probabilitatea ca dintr-un ou să iasă o anumită specie este de 0,2 și probabilitatea de apariție a unei alte specii este 0,3, atunci probabilitatea ca din ou să iasă prima sau a doua specie va fi egală cu suma probabilităților individuale ale celor două rezultate: 0,2 + 0,3 = 0,5.

O **distribuție probabilistică** este o distribuție a probabilităților similară cu o distribuție a frecvențelor cu deosebirea că prima redă probabilitatea de apariție a evenimentelor și nu frecvența acestuia. Deci distribuțiile probabilistice se bazează pe probabilitățile calculate (pornind de la anumite premise ca evenimentele respective să apară) și nu pe frecvențele observate ale evenimentelor. O distribuție a frecvențelor poate fi convertită la o distribuție a probabilităților, dacă fiecare frecvență este convertită la probabilitate prin împărțirea la numărul total de observații (dimensiunea probei).

Utilitatea distribuțiilor probabilistice este multiplă: permite estimarea probabilității ca un anumit eveniment să aibă un anumit rezultat și poate fi folosită pentru a calcula o distribuție de frecvențe de așteptat (estimate). Așa cum o probabilitate poate fi estimată prin împărțirea frecvenței unei anumite observații la numărul total de observații, tot așa, o frecvență estimată poate fi calculată prin înmulțirea probabilității estimate cu numărul total de observații.

Astfel, se pot compara frecvențele observate cu cele estimate, după un anumit model. Dacă diferențele dintre cele două tipuri de frecvențe nu sunt semnificative, atunci modelul după care s-au calculat frecvențele estimate este valabil și pentru cele observate.

Modelele folosite în calcularea probabilităților teoretice sunt modele matematice. Dintre acestea, o parte au o importanță practică deosebită pentru cercetarea biologică. Astfel, există două distribuții probabilistice asociate cu variabile discrete (caractere numărabile), folosite drept model în studiile biologice: distribuția binomială, distribuția Poisson. Dintre distribuțiile probabilistice folosite pentru variabile continue (caractere măsurabile), probabil cea mai importantă, mai ales din punct de vedere conceptual, este distribuția normală.

DISTRIBUȚIA POISSON

Această distribuție are următoarele particularități:

1. Observațiile sunt sub formă de număr de entități;
2. Observațiile se obțin din unități de probă definite (pătrate de probă, intervale de timp etc.) și pot fi organizate într-o distribuție a frecvențelor;
3. Varianța probei este aproximativ egală cu media acesteia;
4. Entitățile numărate sunt relativ rare (mult mai puține decât ar putea să conțină unitatea de probă).
5. Dispersia entităților în timp și spațiu este aleatoare, ceea ce înseamnă că entitățile nici nu se atrag, nici nu se resping, adică sunt independente unele față de altele.

Deși această distribuție este greu de întâlnit în natură, ea este utilă în biologie, fiind singurul model ce poate fi folosit pentru descrierea obiectelor cu dispersie întâmplătoare.

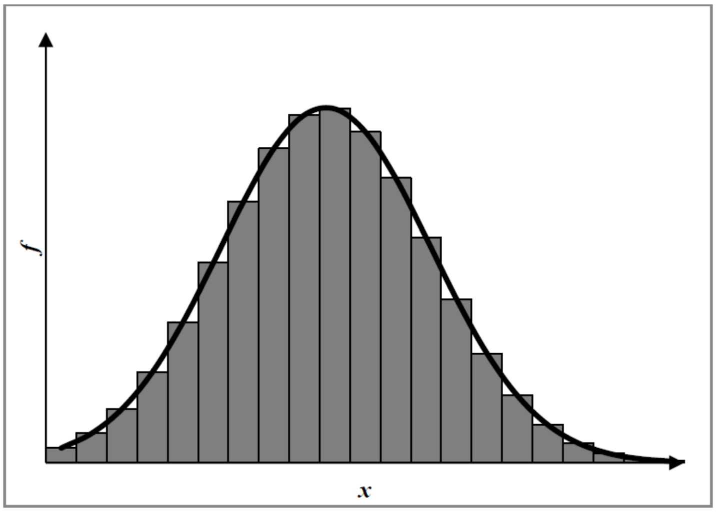
Distribuția Poisson este determinată de un singur parametru λ, care este egal cu media populațională μ și cu varianța populațională σ^2: $\lambda = \mu = \sigma^2$. Deoarece acești parametri rareori ajung să fie cunoscuți, formula de calcul a probabilității se bazează pe media probei ($\overline{x}$) ca estimare a mediei populaționale, pe un anumit număr de entități dintr-o unitate de probă (*x*) și pe constanta matematică, baza logaritmului natural e = 2,7183:

$$p(x) = e^{-\overline{x}} \cdot \frac{\overline{x}^{x}}{x!}$$

DISTRIBUȚIA NORMALĂ

Distribuția normală este una dintre distribuțiile continue. Aceasta descrie, mai mult sau mai puțin, distribuția unui mare număr de variabile, motiv pentru care reprezintă o bază conceptuală pentru multe procedee de analiză statistică.

Variabilele continue pot lua orice valoare între anumite limite. Dacă se reprezintă grafic, distribuția frecvențelor unei astfel de variabile într-o populație, prin intermediul unei linii continui, aceasta va avea o formă simetrică, de clopot. De aceea, această distribuție mai este numită și „clopotul lui Gauss”, care este unul din autorii (Moivre 1733, Legendre 1805, Laplace 1812) care a descris riguros această distribuție (Gauss 1809). Teoretic, dacă se realizează histograma folosind un număr infinit de valori individuale, iar intervalul de clasă este cel mai mic posibil, histograma sau poligonul frecvențelor tinde să devină o curbă continuă



Distribuția frecvențelor valorilor unei variabile

Numeroase variabile continui întâlnite în natură au o distribuție normală. De asemenea, multe variabile care au o amplitudine mare a valorilor prezintă o distribuție aproximativ normală. Unele distribuții discrete tind să devină aproximativ normale sau simetrice pe măsură ce parametrii legați de numărul de valori cresc.

Proprietățile distribuției normale:

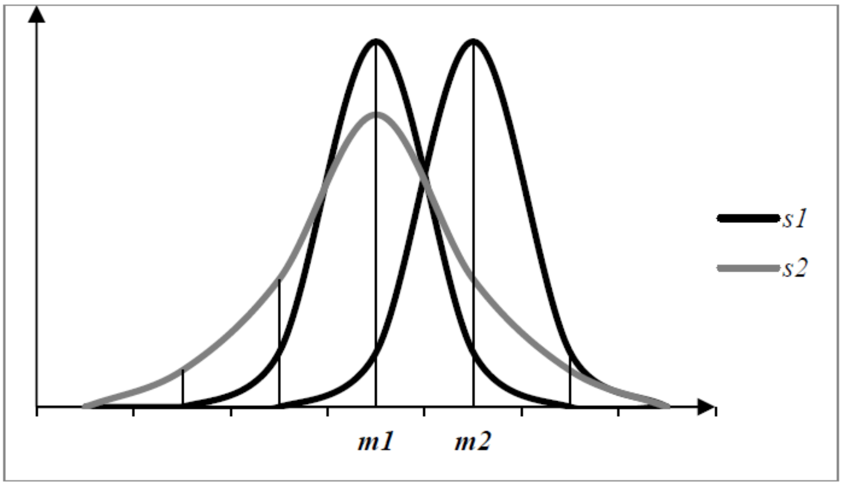
1. Distribuția este definită de medie (μ) și de deviația standard (σ). Poziția distribuției pe abscisă este determinată de valoarea mediei, iar lărgimea acesteia, de deviația standard. Cum acești parametri pot avea o infinitate de valori diferite, înseamnă că există un număr infinit de distribuții normale.

2. Înălțimea curbei față de ordonată este dată de funcția de repartiție pentru fiecare valoare individuală a variabilei:

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

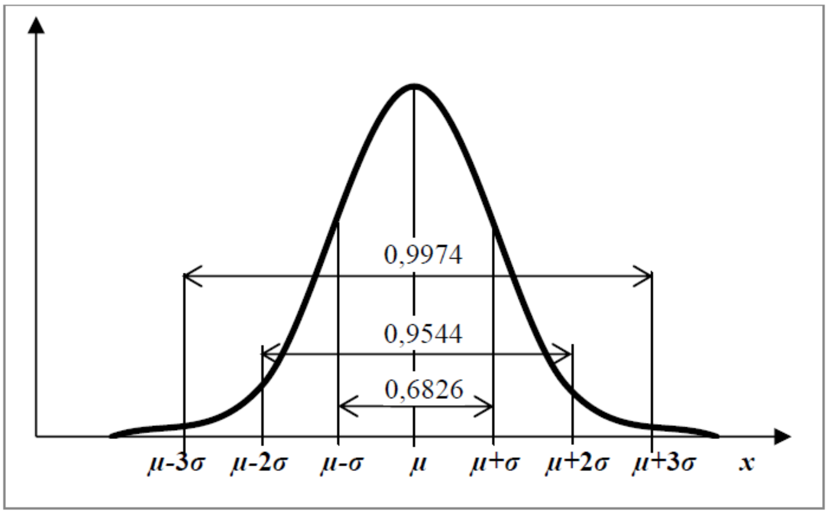
3. Curba este perfect simetrică față de medie, motiv pentru care media și mediana sunt egale în distribuția normală. De asemenea, valorile variabilei egale cu media sunt cele mai

frecvente și astfel media este egală cu modul valorilor individuale. În concluzie, media, mediana și modul valorilor unei variabile normal distribuite sunt egale.



Distribuții normale diferite după medii (m) și deviații standard (s)

4. Curba distribuției cuprinde probabilitatea totală, adică 1. Dacă se consideră suprafața delimitată de curbă ca fiind 100%, atunci suprafața delimitată de valoarea $\mu - \sigma$ și $\mu + \sigma$ reprezintă aproximativ 68,26% din total. Adică în jur de 68% dintre valorile variabilei sunt cuprinse în acest interval sau, altfel spus, probabilitatea ca o valoare selectată aleator din populație să fie cuprinsă de acest interval este de 0,68. Între $\mu - 2\sigma$ și $\mu + 2\sigma$ se găsește 95,44% din suprafața curbei, adică probabilitatea de a observa o valoare din acest interval este de 0,9544. Prin analogie, intervalul $\mu - 3\sigma$ și $\mu + 3\sigma$ cuprinde 99,74% din valorile individuale sau probabilitatea de a extrage o valoare din acest interval este de 0,9974. În practică se folosesc probabilitățile 0,95 și 0,99. Pentru acestea, intervalele sunt $\mu \pm 1,96\sigma$ și, respectiv $\mu \pm 2,58\sigma$. Probabilitatea ca o valoare să fie în afara celor două intervale va fi 1 – 0,95 = **0,05**, respectiv 1 – 0,99 = **0,01**. Aceste proprietăți pot fi folosite pentru aprecierea posibilităților de apariție a unor rezultate.



Suprafețe ale distribuției normale

DISTRIBUȚIA NORMALĂ STANDARD

Orice distribuție normală particulară *(N(μ,σ))* poate fi convertită la distribuția normală standard care se caracterizează prin faptul că are media zero și deviația standard unu *(N(0,1))*. Această conversie se realizează prin calcularea unui **scor z** pentru fiecare valoare individuală a variabilei *x*, în funcție de media și de deviația standard populațională (μ și σ):

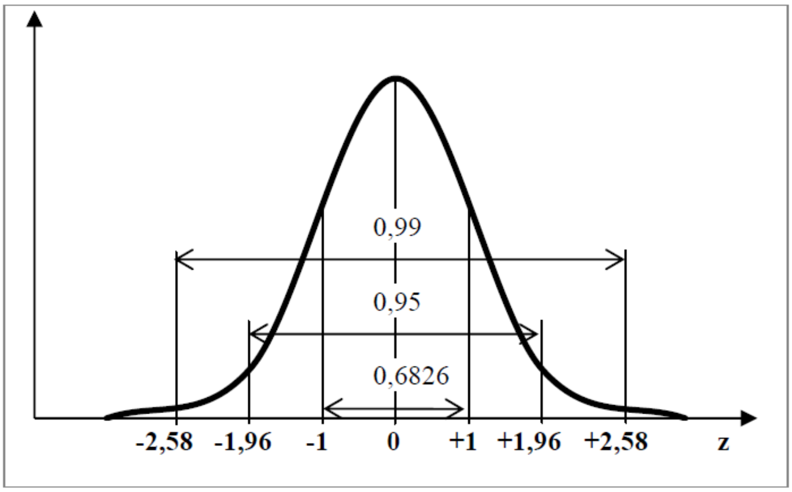
$$Z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

În practică, parametrii populaționali nu pot fi cunoscuți cu exactitate, caz în care pot fi substituiți cu statisticile probei ($\overline{x}$ și *S*), cu condiția ca dimensiunea probei sa fie mai mare sau egală cu 30 (*n ≥ 30*).

$$Z = \frac{x - \overline{x}}{S}$$

Astfel, pentru valorile *x* mai mici decât media, *Z* va avea o valoare negativă, iar pentru cele mai mari decât media, o valoare pozitivă. Scorul *Z* arată la ce distanță de medie există o anumită valoare, unitatea de referință fiind deviația standard.

Intervalele de probabilitate ale distribuției normale standard vor fi:
-1, +1 pentru aproximativ 0,6826 sau 68,26%,
-2, +2 pentru 0,9544 sau 95,44%,
-3, +3 pentru 0,9974 sau 99,74%.
Pentru probabilitățile de 0,95 și 0,99, intervalele vor fi cuprinse între -1,96, +1,96 și, respectiv, -2,58, +2,58.



Suprafețe ale distribuției normale standard

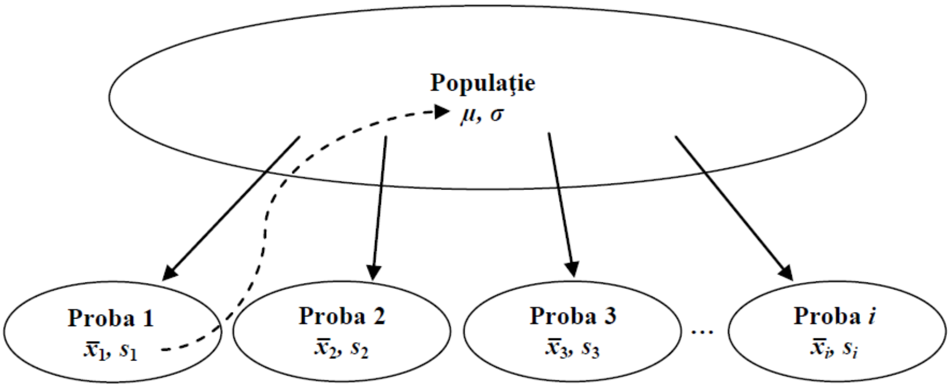
STATISTICĂ INFERENȚIALĂ
ELEMENTE INTRODUCTIVE

Statistica inferențială (inductivă sau analitică) este acea parte a statisticii care cuprinde metode de apreciere critică a variabilității parametrilor empirici. Inferența statistică reprezintă tratarea teoretică a datelor pentru a se ajunge la concluzii logice, asociate observațiilor efectuate. Din punct de vedere biologic, inferența statistică reprezintă stabilirea unor concluzii despre populații pornindu-se de la analiza probelor prelevate (eşantioane) din populațiile respective.

În general, se recunosc două categorii largi de inferențe statistice: estimarea unor parametri populaționali și testarea ipotezelor statistice.

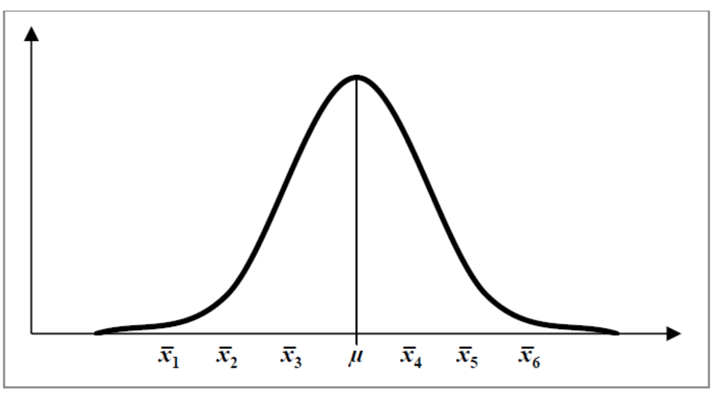
ESTIMAREA MEDIEI POPULAȚIONALE

Dacă dintr-o populație se prelevează o probă aleatoare, aceasta va fi una din numeroasele probe aleatoare care se pot extrage din populația respectivă. Fiecare dintre aceste populații va avea statistici diferite: medii diferite, deviații standard diferite. Cu toate acestea, statisticile acestor populații sunt estimatori ai parametrilor populaționali.



Reprezentarea grafică a prelevării repetate a probelor din populație. (linie continuă – sensul prelevării; line întreruptă – sensul estimării)

Diferențele dintre aceste probe sunt cauze ale erorii de eșantionare, ce rezultă din faptul că unele probe vor cuprinde mai multe valori mari, în timp ce altele, mai multe valori mici din populația de cercetat. Eroarea de eșantionare nu este neapărat rezultatul unor greșeli realizate de observator, ci reflectă împrăștierea aleatoare ce se regăsește în probe. Mediile probelor prelevate aleator din populație se distribuie în jurul mediei populaționale, la fel cum valorile individuale într-o probă se distribuie în jurul mediei probei.



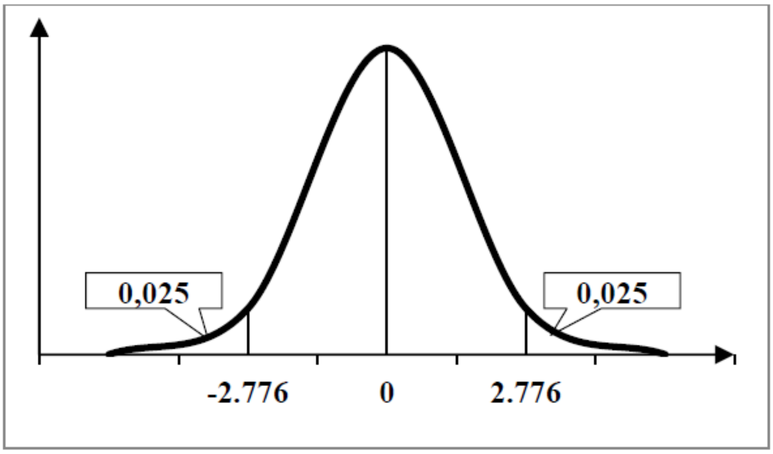
Distribuția normală a mediilor probelor față de media populației

Acest concept are o valoare fundamentală și este surprins de **Teorema limitei centrale** (Moivre 1738, Laplace 1813): mediile probelor ($\overline{x}$) extrase dintr-o populație normal distribuită sunt la rândul lor normal distribuite în jurul mediei populaționale (μ). Mediile probelor extrase dintr-o populaţie care nu are o distribuţie normală, au o repartiţie aproximativ normală dacă dimensiunea probei este mare ($n > 30$).

Utilitatea acestei teoreme constă în faptul că nu este necesară prelevarea repetată a probelor din populație pentru a cunoaște modul lor de distribuire; ele vor avea o distribuție normală. Astfel, putem lua în considerare doar o singură medie a unei probe prelevate dintr-o populație ca fiind una dintre numeroasele medii a căror distribuție ar fi normală. La fel cum deviația standard surprinde împrăștierea valorilor individuale față de media probei, tot așa, împrăștierea mediilor probelor poate fi surprinsă de o deviație standard a mediilor probelor, care se numește **eroarea standard a mediei**.

Estimarea mediei populaționale se poate face pornind de la media și deviația standard ale unei probe și cu ajutorul erorii standard a mediei. Dat fiind faptul că distribuția mediilor probelor se abate de la normalitate pe măsură ce dimensiunea probei scade, se apelează la o distribuție care descrie mai bine distribuția mediilor probelor atunci când deviația standard a populației este estimată prin deviația standard a probei. Această distribuție se numește **distribuția *t*** sau **distribuția Student**.

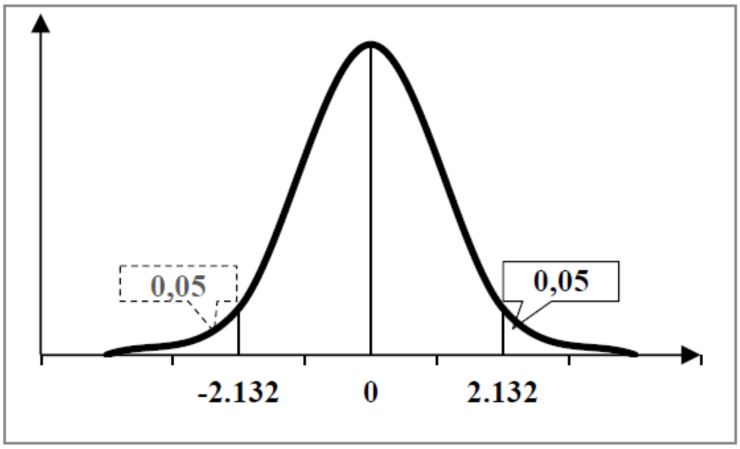
Distribuția Student este similară în multe privințe cu distribuția normală, dar, spre deosebire de aceasta, este definită, pe lângă medie și deviație standard, și de numărul gradelor de libertate (n-1). Așa cum o valoare z corespunde unei anumite proporții din distribuția normală standard, tot așa o valoare t corespunde unei proporții a distribuției Student, dar în plus, ia în considerație și dimensiunea probei prin intermediul gradelor de libertate. Valorile lui t scad odată cu creșterea diferenței n-1, astfel că o valoare critică $t_{(0,05,\ \infty)}$ ce definește 0,95 sau exclude 0,05 din distribuția Student pentru o infinitate de valori ca grade de libertate, are valoarea 1,96, adică exact valoarea lui $z_{(0,95)}$ ce definește aceeași proporție din distribuția normală standard. Deci distribuția t tinde să devină normală odată cu creșterea dimensiunii probei.



Valorile distribuției t sunt tabelate sau se pot calcula în funcție de proporția exclusă din distribuție și de numărul gradelor de libertate. De exemplu, valoarea t ce exclude 0,05 din distribuția Student pentru n-$1 = 4$ grade de libertate este 2,776. Proporția (0,05) sau procentul (5%) exclus este repartizat în mod egal în cele două cozi ale distribuției (vezi figura de mai sus).

Deci există de fapt două valori *t*: +2,776 care exclude 0,05/2 = 0,025 din ramura dreaptă a distribuției și -2,776 care exclude 0,025 din ramura stângă a distribuției.

Dacă se doreşte reprezentarea valorii *t* care exclude 0,05 din distribuție doar în ramura dreaptă pentru 4 grade de libertate, atunci trebuie căutată în tabel valoarea ce exclude 0,1 din distribuție, care exclude câte 0,05 în fiecare ramură a distribuției (vezi fig. De mai jos). Această valoare este ±2,132. Deci, dacă ne interesează o singură ramură a distribuției, trebuie căutată valoarea *t* care exclude o proporție dublă din distribuție.



Estimarea **intervalului de confidență al mediei** populaționale pe baza deviației standard a probei și cu ajutorul distribuției *t* are următoarele condiții de aplicare:

1. proba este prelevată aleator din populația de interes;
2. datele sunt apreciate pe o scală de raport sau de interval;
3. variabila este aproximativ normal distribuită în probă.

Pentru a realiza estimarea este nevoie de valoarea mediei probei ($\overline{x}$) și a deviației standard estimate (*S*). Cu ajutorul deviației standard se calculează eroarea standard a mediei:

$$S_{\overline{x}} = \frac{S}{\sqrt{n}}$$

Se estimează intervalul de confidență pentru o probabilitate de 0,95 (95%) a mediei populației pornind de la relația:

$$\mu = \overline{x} \pm S_{\overline{x}} \cdot t_{(0,05,n-1)}$$

Din această relație rezultă limita inferioară (*LI*) și cea superioară (*LS*) a intervalului de confidență:

$$LI = \overline{x} - S_{\overline{x}} \cdot t_{(0,05,n-1)}$$
$$LS = \overline{x} + S_{\overline{x}} \cdot t_{(0,05,n-1)}$$

Concluzia estimării este că intervalul *LI-LS* include media populației din care a fost extrasă proba, cu o probabilitate de 95% (0,95).

TESTAREA IPOTEZELOR STATISTICE

În orice știință, progresul se obține prin realizarea observațiilor asupra unor procese sau fenomene și prin experimente ale căror concluzii sunt utilizate sub forma unor generalizări sau teorii care să explice observațiile. Demersul științific debutează cu realizarea observațiilor și cu explicarea lor. Explicația unei observații științifice se numește **ipoteză** și are următoarele caracteristici: este în concordanță cu observațiile făcute (dacă este adevărată, atunci va explica ceea ce s-a observat); poate fi testată prin experimente (dacă este falsă, atunci acest lucru poate fi dovedit).

De ce trebuie dovedită falsitatea unei ipoteze și nu veridicitatea ei? În filosofia științei, se consideră că să poate dovedi că o ipoteză falsă este falsă, în timp ce o ipoteză adevărată poate să nu se dovedească niciodată că este adevărată. Ca urmare, o ipoteză este considerată adevărată atât timp cât nu poate fi infirmată prin alte observații, experimente și testări. Când încercările de a dovedi falsitatea unei ipoteze eșuează, atunci încrederea (confidența) în ipoteza respectivă crește. Dacă o astfel de ipoteză are o aplicativitate largă și explică numeroase evenimente, atunci ea devine o **teorie**. La fel ca în cazul ipotezelor, o teorie adevărată s-ar putea să nu poată fi dovedită a fi adevărată, în timp ce una falsă se poate dovedi a fi falsă.

Metodologia științifică de confirmare a unei ipoteze operează pe baza mecanismului logic „dacă atunci": **dacă** ipoteza este corectă, **atunci** rezultatul testării trebuie să fie unul anume. Dacă rezultatul testării este altul decât cel prezis de ipoteză, aceasta se respinge și trebuie căutată o explicație mai bună. Acest proces tipic pentru știință este numit **testarea ipotezelor**.

Testarea unor concluzii științifice prin procedee statistice se numește **testarea ipotezelor statistice** și reprezintă o aplicare specifică a metodologiei științifice. Formularea ipotezelor statistice se face astfel încât să existe doar două rezultate posibile. De exemplu, se pot formula două ipoteze: „afirmația A este adevărată" și „afirmația A nu este adevărată". Dacă primul enunț este cel adevărat, atunci, conform filosofiei științei, nu se poate dovedi acest fapt. Dacă însă se testează al doilea enunț și acesta se dovedește a fi incorect (o ipoteză falsă se poate dovedi că este falsă), atunci se respinge enunțul testat – „afirmația A este falsă" – și se acceptă celălalt enunț – „afirmația A este adevărată" – ca unică alternativă corectă.

Când se lucrează pe probe extrase din populații, deci doar cu o parte din întregul la care se va face referință în final, va exista întotdeauna o probabilitate ca proba să nu fie reprezentativă pentru toată populația. Cu toate acestea, se va putea preciza probabilitatea ca o ipoteză din cele două să fie corectă sau incorectă. Dacă probabilitatea ca ea să fie incorectă este foarte mică, atunci se poate considera că ipoteza respectivă este corectă și invers, dacă probabilitatea ca ipoteza să fie corectă este foarte mică, atunci se poate concluziona că ipoteza este incorectă.

În orice testare a ipotezelor statistice, ipotezele formulate sunt întotdeauna contradictorii. Ipoteza testată prin diferite procedee numite **teste statistice** este așa-numita **ipoteză nulă** (**H_0**). Aceasta presupune în general lipsa efectului, lipsa diferenței și, ca urmare, implică o egalitate. Cealaltă ipoteză (**H_1** sau **H_a**) se numește **ipoteză alternativă**. De exemplu, dacă dorim să arătăm că A este diferit de B, atunci H_0 va fi $A = B$ (implică o egalitate), iar H_1 cea va fi $A \neq B$. Ipoteza care se testează este de fapt H_0. Dacă aceasta se dovedește adevărată, atunci se acceptă ca atare. Dacă H_0 se dovedește a fi falsă, atunci se respinge și se acceptă H_1 ca unică alternativă.

Orice test statistic constă într-o serie de calcule aplicate datelor din probe care au ca rezultat o singură valoare numită **statistica testului**. Statistica unui test reprezintă o translație a datelor din probe la o distribuție cunoscută. Este un proces similar cu cel de trecere a unei valori de la o distribuție normală particulară la o valoare z a distribuției normale standard, valoare ce corespunde unei anumite proporții din distribuție sau unei anumite probabilități conform schemei $x \rightarrow z \rightarrow p$. Statistica testului, proprie unui anumit tip de distribuție, este comparată cu o valoare cu semnificație de prag pentru o anumită probabilitate, numită **valoare critică**. În funcție de poziționarea statisticii testului față de valoarea critică, se ia decizia de acceptare sau respingere a ipotezei nule. Valorile critice pentru fiecare test statistic sunt calculate și aranjate în tabele sau se pot calcula pornind de la funcțiile specifice distribuțiilor.

În funcție de întrebarea la care trebuie să răspundă testul statistic, ipotezele acestuia se pot scrie în mai multe variante. Dacă ipotezele conțin semnele = și ≠, atunci se realizează un **test în variantă bilaterală (*H_0: A =B; H_1: A ≠ B*)**. Denumirea provine de la faptul că există două situații în care se poate respinge ipoteza nulă și accepta ipoteza alternativă: când $A > B$ și când $A < B$. Dacă ipotezele conțin semnele ≥, ≤, > și <, atunci se realizează un **test în variantă unilaterală *(H_0: A ≤ B; H_1: A > B)*** sau ***(H_0: A ≥ B; H_1: A < B)***. În oricare din cele două variante există doar o singură situație în care se poate respinge ipoteza nulă și se poate accepta ipoteza alternativă: dacă și numai dacă $A > B$, pentru prima pereche de ipoteze, și dacă și numai dacă $A < B$, pentru a doua pereche de ipoteze.

În general, testele unilaterale se utilizează doar dacă există un motiv apriori care să sugereze o tendință direcțională a datelor. Este bine ca testele unilaterale să se facă după o testare în variantă bilaterală. Între cele două variante ale unui test nu există nici o diferență în privința modului de calcul al statisticii testului, ci diferă doar ipotezele și pragul de semnificație mai mic în cazul testelor unilaterale.

Luarea unei decizii statistice se realizează în funcție de pragul de probabilitate. Acesta se mai numește și **nivel de confidență**, **de încredere** sau **prag de semnificație** și se notează cu ***α***. Valorile α cel mai des utilizate în biologie sunt 0,05 sau 0,01 și se desemnează înainte de derularea testului. Pragul de semnificație (α) sau probabilitatea calculată pentru o anumită statistică a unui test (p) trebuie precizată în concluziile oricărei cercetări în care s-au folosit teste statistice (de exemplu, „rezultatul este semnificativ în proporție de 95%” sau „ … pentru α = 0,05” sau „ … pentru p < 0,05” sau „ … pentru p = 0,0003”).

Se poate întâmpla ca H_0 să fie respinsă pentru o valoare a probabilității egale cu 0,05, dar să nu poată fi respinsă dacă nivelul de încredere stabilit apriori este de 0,01. Această situație se datorează faptului că, pentru majoritatea distribuțiilor, valoarea critică crește pe măsură ce nivelul de încredere scade. Ce decizie se ia într-o astfel de situație și cum poate fi ea argumentată pentru a elimina subiectivismul?

În orice test statistic pot să apară două genuri de erori statistice:
- **eroare de genul I**, ce constă în respingerea eronată a H_0 când este adevărată; riscul sau probabilitatea de a face o astfel de eroare este **α**;
- **eroare de genul II**, ce constă în acceptarea eronată a H_0 când este falsă; riscul sau probabilitatea de a face o astfel de eroare este **β**.

		Ipoteza adevărată	
		H_0	H_1
Ipoteza acceptată	H_0	Corect (1 - α)	Eroare II p = β
	H_1	Eroare I p = α	Corect (1 - β)

Dacă se dorește reducerea riscului de a comite o eroare I, atunci α trebuie să scadă, ceea ce conduce la creșterea riscului β de a comite o eroare II și invers. Se consideră că α = 0,05 asigură un echilibru între riscul de a comite o eroare de genul I și cel de a comite o eroare de genul II.

Dacă valoarea α se decide de la început sau se poate calcula pentru o anumită statistică a unui test corespunzător unei funcții de distribuție, valoarea lui β nu se calculează. Valoarea lui β scade pe măsură ce dimensiunea probelor (*n*) crește și crește pe măsură ce diferența dintre valorile comparate (*A* și *B*) scade. Riscul β variază de la un test la altul. Un **test puternic** înseamnă de fapt că are un **risc β mic**, adică este mai puțin influențat de dimensiunea probei și de diferențele mici dintre valorile comparate.

În ceea ce priveşte puterea unui test sau riscul de a comite o eroare de genul II, trebuie menționat că testele neparametrice sau independente de distribuție sunt mai puțin puternice decât cele parametrice considerate mai restrictive. Din această cauză un cercetător ar putea manifesta o tendință de evitare a testelor neparametrice în ideea folosirii unor teste mai puternice. O astfel de atitudine se poate dovedi eronată deoarece nu trebuie sacrificată validitatea utilizării unui test în favoarea puterii acestuia! Regula de siguranță în privința alegerii unui test parametric sau neparametric este că, dacă există o îndoială oricât de mică cu privire la modul în care datele din probe satisfac condițiile restrictive ale unui anumit test parametric, atunci mai bine se apelează la un test neparametric alternativ celui parametric.

Rezumând aspectele prezentate până acum, **testarea ipotezelor statistice** se realizează prin parcurgerea următoarelor **etape**:

1. Enunțarea clară a întrebării la care se dorește aflarea răspunsului în urma prelucrării datelor din probe.
2. Identificarea tipului de variabilă și a scalei de apreciere a acesteia și aprecierea distribuției probei. Această etapă permite luarea deciziei privind utilizarea unui test parametric sau a unuia neparametric.
3. Pe baza răspunsurilor din primele două etape se formulează cele două ipoteze statistice (practic se alege o variantă bilaterală sau una unilaterală a testului) și se stabilește regula de decizie (se desemnează nivelul de încredere sau de confidență α).
4. Se calculează statistica sau statisticile testului.
5. Se compară statistica obținută cu valoarea critică corespunzătoare valorii α și a gradelor de libertate și se ia o decizie privind acceptarea sau respingerea ipotezei nule. Decizia mai poate fi luată și prin calcularea probabilității corespunzătoare statisticii testului (aceasta va fi de fapt probabilitatea ca H_0 să fie adevărată) cu ajutorul funcției distribuției acesteia sau folosind o aplicaţie (software) adecvată.

TESTAREA UNEI IPOTEZE PRIVIND MEDIA UNEI SINGURE POPULAȚII

Această testare permite compararea mediei unei probe ($\overline{x}$) cu o valoare de interes care de obicei reprezintă media cunoscută a unei populații (μ). Altfel spus, se verifică ce probabilitate există ca proba luată în analiză să provină dintr-o populație cu o anumită medie cunoscută. Populația din care a fost extrasă proba poate fi diferită de cea de referință, caz în care se testează o ipoteză nulă conform căreia nu există o diferență semnificativă între mediile celor două populații.

Testul care se folosește într-o astfel de situație se numește **Testul *t* (Student) pentru o probă**. Fiind un test parametric, condițiile de aplicare ale acestuia sunt următoarele:

1. proba trebuie să fie extrasă aleator din populație;
2. variabila trebuie să fie exprimată pe o scală de raport sau de interval;
3. valorile probei trebuie să fie aproximativ normal distribuite.

Dacă μ este media populației din care a fost extrasă proba și μ_0 este media populației de referință (sau o valoare de referință), atunci ipotezele testului pot fi:

$$H_0: \mu = \mu_0 \quad H_0: \mu \leq \mu_0 \quad H_0: \mu \geq \mu_0$$
$$H_1: \mu \neq \mu_0 \quad H_1: \mu > \mu_0 \quad H_1: \mu < \mu_0$$

Prima pereche de ipoteze se scrie în cazul variantei bilaterale a testului, adică atunci când întrebarea este: „Există o diferență semnificativă între μ și μ_0?”.

Ultimele două perechi de ipoteze se scriu în cazul unui **test unilateral dreapta** („Este μ semnificativ mai mare decât μ_0 ?”) și, respectiv, unui **test unilateral stânga** („Este μ semnificativ mai mică decât μ_0 ?”).

Indiferent de varianta în care se realizează testul, statistica sa este:

$$t = \frac{\overline{x} - \mu_0}{S_{\overline{x}}}$$

În această relație $\overline{x}$ este un estimator al mediei populației din care a fost extrasă proba (μ). Condiția testului constă în compararea statisticii acestuia cu o valoare critică $t_{(\alpha, n-1)}$:

- dacă $t \geq t_{(\alpha, n-1)}$ => H_0 se respinge și se acceptă H_1 pentru o probabilitate de $1\text{-}\alpha$ sau 100(1-α)% . Deci se acceptă că μ și μ_0 diferă semnificativ una de alta.
- dacă $t < t_{(\alpha, n-1)}$ => H_0 se acceptă pentru aceeași probabilitate, adică nu există o diferență semnificativă între μ și μ_0.

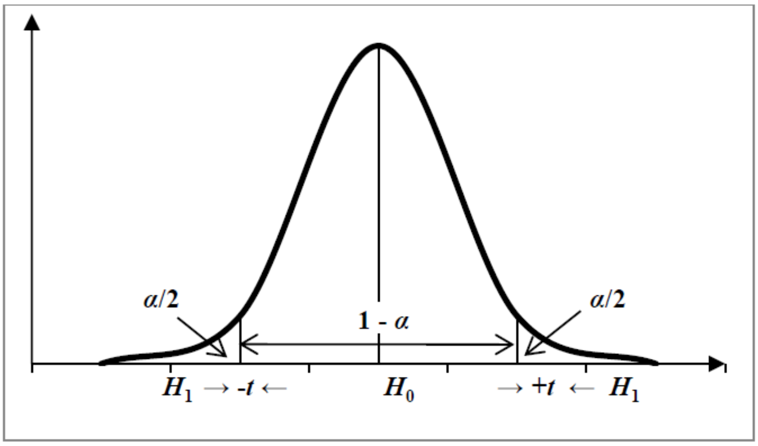
Dacă μ este semnificativ diferită de μ_0, înseamnă că μ este ori mai mare, ori mai mică decât μ_0. Aceasta implică faptul că $\overline{x}$ este mai mic sau mai mare decât μ_0.

În situația în care $\overline{x}$ este mai mare decât μ_0, atunci numărătorul statisticii *t* va fi negativ și, implicit, statistica *t* va avea o valoare negativă. Deci *t* trebuie comparat cu valoarea critică pozitivă aflată în ramura dreaptă a distribuției *t*. În același mod, dacă $\overline{x}$ este mai mic decât μ_0, statistica *t* va fi negativă și trebuie comparată cu valoarea critică negativă din ramura stângă a distribuției.

Condiția testului ar trebui în realitate scrisă astfel: dacă *t* este mai mic decât valoarea critică negativă și mai mare decât valoarea critică pozitivă, atunci H_0 se respinge și se acceptă H_1 pentru o probabilitate de 1 - α sau 100(1 - α)%.

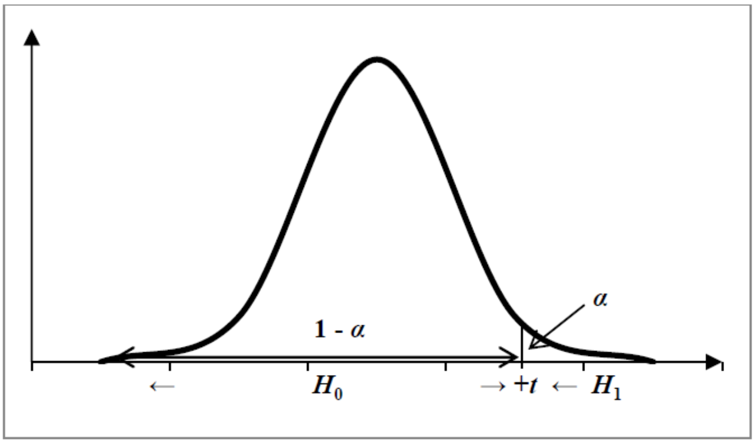
Astfel rezultă că dacă *t* se găsește între valoarea critică negativă și cea pozitivă, H_0 va fi acceptată. Deci între cele două valori critice există zona de acceptare a ipotezei nule (1 - α), în afara căreia se găsesc zonele de respingere a acesteia și de acceptare a ipotezei alternative (câte $\alpha/2$ în fiecare ramură a distribuției).

Atunci când se aplică testul în variantă unilaterală, atunci există o singură zonă de respingere a H_0 cantonată doar într-o singură ramură a distribuției: dreaptă sau stângă. Dacă se vizează ramura din dreapta distribuției ($H_1: \mu > \mu_0$), atunci statistica testului (*t*) trebuie comparată cu valoarea critică pozitivă.



Zonele de respingere a H_0 pentru un test bilateral

Dacă se urmărește coada din stânga a distribuției (H_1:$\mu < \mu_0$), atunci statistica testului (t) trebuie comparată cu valoarea critică negativă (zona de respingere a H_0 se află în partea opusă față de cum este prezentată în figura de mai jos.



Zona de respingere a H_0 pentru un test unilateral dreapta

Pentru a simplifica lucrurile, se poate scrie condiția testului astfel încât să fie valabilă în toate cazurile (și în cazul unui test bilateral, și în cazul testelor unilaterale). Aceasta se poate obţine cu ajutorul statisticii testului în modul:

dacă $|t| \geq t_{(\alpha,\ n-1)}$ => H_0 se respinge și se acceptă H_1 cu o probabilitate de 1-α sau 100(1-α)%.

De subliniat faptul că valoarea critică pentru un anumit prag de confidență pentru un test unilateral este egală cu valoarea critică a acelui prag de confidență pentru un test bilateral.

BIBLIOGRAFIE

Nicoleta Breaz, **Mihaela Jaradat**, 2009, *Statistică descriptivă. Teorie şi aplicaţii*, Ed. RISOPRINT, Cluj-Napoca.
Steve Johnson, 2008, *Microsoft Office – Excel 2007*, Ed. Teora, Bucureşti.
Ştefan Zamfirescu, **Oana Zamfirescu**, 2008, *Elemente de statistică aplicate în ecologie*, Ed. Univ. „Alexandru Ioan Cuza” Iaşi.
Liviu Dragomirescu, 1998, *Biostatistică pentru începători*, Edit. Constelaţii, Bucureşti.